

Relative Pendulmaalinger

i København og paa Bornholm med Tilknytning til
Wien og Potsdam.

Af

Generalmajor **Zachariae.**

Hertil Tavle V.

Avec résumé en français.

(Meddelt i Mødet den 27. Novbr. 1896.)

I.

Det er i en tidligere Sammenhæng fremhævet, at Pendulmaalingerne i den nyesté Tid spille en mere fremtrædende Rolle i Geodæsién end tidligere. De tjene til at bestemme Tyngdens Intensitet, og ligesom dennes Variationer i det store fra Ækvator mod Polerne yde et væsentligt Bidrag til Bestemmelsen af Klodens Applatissement, saaledes give Variationerne paa kortere Strækninger fra Sted til andet i Forbindelse med Lodafvigelserne Elementer til Belysning af Geoidefladens fra Sfæroiden afvigende Former. Som bekendt have nøjagtige Tyngdebestemmelser ogsaa Interesse udenfor Geodæsién; de komme til Nytte ved adskillige fysiske Opgaver, f. Ex. den nøjagtige Maaling af Luftarternes Spænding, og den Oplysning, de kunne give om Massefordelingen i Jordskorpens øvre Lag, turde muligen med Tiden kunne faa Betydning for Geologien.

Man skelner imellem absolute og relative Pendul-

maalinger. Ved de første er Opgaven at finde selve Værdien g for Tyngdens Akceleration igennem en Bestemmelse af Sekundpendulets Længde paa det paagældende Sted, og i denne Form frembyder Opgaven ikke ringe Vanskelighed; den er baade langvarig, omstændelig og kostbar, og det er kun undtagelsesvis, at de nødvendige Betingelser for dens nøjagtige Gennemførelse kunne skaffes tilveje. Anderledes med den relative Bestemmelse, der gaar ud paa at finde ikke selve Tyngdens Akceleration, men Forskellen $g-g'$ i dens Akcelerationer ved en Bestemmelse af Forskellen $S'-S$ i Syngningstiderne paa de to Steder for det samme invariable Pendul. Denne Opgave frembyder vel ogsaa nogen Vanskelighed, navnlig da den forudsatte Uforanderlighed ikke er tilstede, fordi man ikke overalt kan observere nøjagtig under de samme Betingelser. Imidlertid er det dog muligt med tilstrækkelig Tilnærmelse at reducere Observationerne til de samme Betingelser, naar man drager Omsorg for, at disse ikke afvige for meget fra det normale. Det kan ikke noksom indskærpes, at man bør anvende nøjagtig den samme Fremgangsmaade ved alle Observationer, der skulle sammenlignes; det kommer ikke saa meget an paa, at Fremgangsmaaden i alle Enkeltheder er den bedste, som at den ikke underkastes Modifikationer, der kunne forandre Betingelserne fra Station til anden i det System, der skal beregnes under et.

Det er et saadant System af relative Pendulmaalinger, der gennemgaaende overalt ere udførte efter nøjagtig de samme Regler, som vi i det følgende skulle behandle.

II.

Vort Pendulapparat har den af den østrigske Oberst von Sterneck angivne Konstruktion, der beskrives i «Mittheilungen des k. und k. militair-geographischen Institutes» 1887 Bd. VII. Vi indskrænke os her til at anføre nogle Hovedtræk. Det bestaar af et massivt Metalstativ, som foroven bærer en cirkelformet med en Spalte forsynet Agatplade, hvorpaa Æggen af

Pendulkniven, der ogsaa er af Agat og i fast Forbindelse med Pendulet, hviler under Svingningen. Til Apparatet, der er udgaæet fra Schneiders Etablissement i Wien og mærket Nr. 14, hører 3 Penduler, betegnede ved Numrene 51, 53 og 55, med Svingningstider lidt større end 0,5 Sekunder, i Gennemsnit omtrent 0,508 Sekunder (Stjernetid). Stativet hviler under Maalingen paa et tregrenet Fodstykke af Støbejern, som lægges paa en transportabel af tre Stykker bestaaende Granitpille, der opstilles paa en meget fast Grund, og hvis enkelte Stykker under Brugen ere solidt forbundne indbyrdes ved en størknet Gipsdejg. Apparatet er under Maalingen overdækket af en Glaskasse, der forhindrer Luftstrømninger, og hvori tillige Magasinthermometret opstilles i nær Forbindelse med Pendulet og overalt i samme Stilling mod dette. Maalingerne paa en Station omfatte flere Rækker, mindst to saadanne, ofte fire. I hver Række benyttes alle 3 Penduler, det ene efter det andet, og Rækkerne fordeles symmetrisk paa Intervallet, som omsluttet af de to Tidsbestemmelser, hvorved Uhrets Gang erholdes. Koincidenserne bestemmes ved et særligt Apparat, i hvis Kikkertpendulsvingningerne vise sig som Blink, og Koincidenserne angives da ved de ensartede Blink, der vise sig paa samme Sted i Kikkerten (Midttraaden). Naar Observationen begynder, er Penduludslaget omkring 15 Bueminuter; den varer for et Pendul paa det nærmeste en halv Time, og Udslaget formindskes i denne Tid med omtrent 3 Bueminuter. Da hvert Pendul skal hænge paa Stativet under Glaskassen i mindst en halv Time, inden Observationen af det begynder, tager Udførelsen af en Række mindst tre Timer.

Betegner man ved c Varigheden i Sekunder af en Koicidens, d. v. s. Tiden, som forløber imellem to paa hinanden følgende ensartede Blink, der vise sig paa Midttraaden, saa vil et Pendul som de foreliggende, hvis Svingningstid er lidt større end et halvt Sekund, i c Sekunder udføre nøjagtig $2c-1$ Svingninger, og man erholder følgende

$$s = \frac{c}{2c - 1},$$

idet s er den ukorrigerede Svingningstid, som overalt maa reduceres til samme Normalbetingelser, hvortil vælges Penduludslaget Nul, Temperaturen Nul, Barometerstanden 760^{mm} og en Uhrgang, der nøjagtig svarer til Stjernetid. Det saaledes reducerede Udtryk for Svingningstiden S bliver

$$S = s \left(1 - \frac{\alpha^2}{16} \right) - \beta t - \gamma D + \Delta u - \sigma,$$

hvor α er Penduludslaget i Forholdsmaal, β Temperaturkorrektionen for 1° Celsius, γ Korrektionen for Enhed af Lufttæthed, svarende til Barometerstanden 760^{mm} og Temperaturen Nul, Δu er Uhrets Gang mod Stjernetid i Tiden s og σ Indflydelsen af Medsvingningen af Observationspillen og dens Underlag. Vi skulle kortelig omtale de forskellige Led i denne Formel og begynde da med at anføre nedenstaaende Udskrift af Observationsjournalen for en Maaling med Pendul Nr. 55.

Rø Kirke d. 2/s 95 2^h 51^m p. m.

Bar. II. — Th. 55.

55		14,75	2,00 } R	5,0-5,0 } 4,5	12,05 } 17°,75	334,24-18°,5 } 751,6							
		14,75	2,00 } 4,00	4,0-4,0 }	12,08 }	334,20-18°,5 }							
1		^h 8	^m 11	^s 46,0	^h 8	^m 37	^s 30,0	^m 25	^s 44,0	c	=	30,881	{ 1,4896914 }
2			12	15,6			59,3		43,7	$2c - 1$	=	60,762	{ 1,7836321 }
3				47,8		38	31,8		44,0	$\frac{c}{2c - 1}$	=		{ 9,7060593 }
4			13	17,5		39	1,5		44,0		=	$s = 0,5082288$	
5				49,7			33,8		44,1		-	$\Delta\alpha = -$	4
6			14	19,2		40	3,0		43,8		-	$\beta t = -$	801
7				51,1			35,5		44,4		-	$\gamma D = -$	515
8			15	20,8		41	4,8		44,0			$\Delta u = +$	192
9				52,8			37,2		44,4			$\sigma =$	0
10			16	22,3		42	6,3		44,0			$S = 0,5081160$	
(11)	(54,8)	(38,8)		1544,04				

Øverst til venstre er anført Stationens Navn, Dato og Middeltid for Observationens Begyndelse, øverst tilhøjre Betegnelserne for det benyttede Barometer og Thermometer. Selve Skemaet er ved en horizontal Streg delt i to Dele, hvoraf den øverste har 6 Rubriker, som indeholde: i 1ste Rubrik Pendulets Nummer, i 2den Traadkorsets Stilling mod en «fast» Skala før og efter Observationerne, i 3die Kikkertens Afstand i Meter maalt ved Begyndelse og Slutning af Observationen samt Summen R af disse 2 Bestemmelser, i 4de, 5te og 6te Rubrik henholdsvis Penduludslaget, Thermometeraflæsning i Centimeter og Aflæsningerne paa Barometret og dets Thermometer, alt baade for Begyndelsen og Slutningen af Observationen, samt i alle 3 Rubriker de respektive Middeltal, for Thermometeraflæsningernes Vedkommende oversat i Centigrader, ved Barometeraflæsningerne i Millimeter og korrigeret for Temperatur. I Skemaets nederste Del anføres i 1ste Kolonne Løbenummer for de 11 første efter hinanden observerede Koincidenser, i 2den de tilsvarende Uhrtider. Efter Observation Nr. 11 gøres et Ophold paa omtrent 20 Minuter, nøjagtig 40 *c*. Derefter udføres Observationerne i 3die Rubrik, som indeholder Tiderne for de 10 paa hinanden følgende Koincidenser, der svare til de ikke anførte Løbenumre 51 til 60 — Nr. 61 observeres ogsaa, men benyttes kun til Kontrol —. Varigheden af Opholdet bestemmes ved at multiplicere Differensen mellem Nr. 11 og Nr. 1 med 4. Adderes dette Multiplum til den for Nr. 11 i 2den Kolonne anførte Tid, faas den omtrentlige Tid for Nr. 51, og lidt før denne Tid maa Observator altsaa være parat ved Kikkerten for at iagttage Koincidensen. Differenserne i 4de Kolonne af Tallene i 3die og 2den angive 10 observerede Værdier for 50 *c*, hvis Middelværdi er i Sekunder opført for neden under Stregen. I 5te Kolonne følger saa Beregningen af Svingningstiden efter den foran anførte Formel, idet dog $\frac{\alpha^2}{16}$ *s* er betegnet ved $\Delta\alpha$.

I ovennævnte 5te Kolonne er Værdien af *c* opført med 3

Decimaler, hvilket svarer til en Regningsnøjagtighed, der karakteriseres ved Middelfejlen $3 \cdot 10^{-4}$. Denne Regningsnøjagtighed vil være passende, hvis den fra selve Maalingerne hidrørende Middelfejl paa c ligger imellem 0,01 og 0,001. Da den Faktor, hvormed disse Grænser maa multipliceres for at give de tilsvarende Grænser for den enkelte Observations Middelfejl, er $50\sqrt{5} = 112$, bliver Betingelsen ensbetydende med, at Middelfejlen paa den enkelte Maaling omtrent skal ligge mellem Grænserne 1^s og $0^s,1$, en Betingelse, som overalt er tilstede ved vore Maaling. Ved Differentiation af ovenstaaende Udtryk for s erholdes

$$ds = \frac{dc}{(2c-1)^2}$$

eller, da c her er omtrent 30, ved Afrunding

$$ds = \frac{dc}{3500}.$$

Sættes heri eksempelvis $dc = 1 \cdot 10^{-3}$, bliver $ds < 3 \cdot 10^{-7}$, og det er derfor ret passende at beregne s med 7 Decimaler, naar c beregnes med 3 Decimaler. Hvad angaar Reduktionen for Penduludslaget α bemærkes, at denne kan bringes i Tabel for Argumenterne n og R , idet $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3n}{R}$, hvor n aflæses i Kikkerten paa det reflekterede Billede af en Maalestok. Denne, der er anbragt paa Koincidensapparatet, reflekteres ind i Kikkerten ved et Spejl, som svinger med Pendulet og derfor i Kikkerten viser Maalestokkens Billede svingende op og ned med en Vinkelbevægelse, der er dobbelt saa stor som Pendulets. Maalestoksdelen er 3 Millimeter, n er Antallet af saadanne Dele, som dens Nulstreg gennemløber til hver Side af Midtestillingen, og R det dobbelte af Maalestokkens Afstand fra Pendulet.

De to næste Led i Formlen afhænge af Temperatur- og Luftkonstanterne β og γ , der maa bestemmes ved særlige Forsøg i opvarmet og luftfortyndet Rum. Disse Forsøg ere for vort Apparat udførte saavel i Wien som i Potsdam henholdsvis i

Foraaret 1894 og 1896 og have givet de henholdsvis ved W og P betegnede Resultater

$$\begin{array}{lll} \beta = 45,40 \cdot 10^{-7} & \gamma = 542 \cdot 10^{-7} & W \\ \beta = 44,83 & \gamma = 573 & P \\ \beta = 45,115 & \gamma = 557,5 & , \quad \frac{1}{2} (W + P) \end{array}$$

hvor der tillige i en tredje Linie, betegnet ved $\frac{1}{2} (W + P)$, anføres Middeltallene af Bestemmelserne i Wien og Potsdam. Det er disse Middelværdier, som i det følgende ere benyttede ved Regningerne. Vistnok ville Afvigelserne fra de nævnte Middeltal fremkalde betydelige Forandringer paa selve Svingningstiden, men derimod ikke paa de Størrelser, hvorpaa det her kommer an, nemlig Differenserne mellem Svingningstiderne; thi $S'-S$ forandres forholdsvis meget lidt ved en lille Forandring i β og γ , naar det kun iagttages, at der ved S benyttes samme Værdier for disse Konstanter som ved S' .

Betragte vi nu Luftkorrektionen γD , bemærkes det først, at Tætheden D beregnes af

$$D = \frac{B - 0,264 F}{760 (1 + \alpha t)},$$

hvor B er Barometerstanden, F Vanddampens Spændkraft i Millimeter, α Luftens Udvidelseskoefficient, t Temperaturen — dernæst, at D er bragt i Tabel for Argumenterne B og t . Ifølge de ovenfor anførte Talstørrelser ere Afvigelserne af W og P fra $\frac{1}{2} (W + P)$ for γ 's Vedkommende mindre end $0,03 \gamma$; da nu tillige de forekommende Variationer i D intet Sted overskride $0,05 D$, saa vil Forskellen, som fremkommer paa $S'-S$ ved Benyttelsen af $\frac{1}{2} (W + P)$ for W eller P , ikke for Luftkorrektionens Vedkommende overskride $0,0015$ af denne Korrektion og altsaa være mindre end den lige overfor Middelfejlen forsvindende Størrelse $1 \cdot 10^{-7}$.

Paa lignende Maade, men dog noget anderledes, forholder det sig med Varmekorrektionen. Anvendelsen af $\frac{1}{2} (W + P)$ i Steden for W eller P medfører her en Forskel af $0,285 (t'-t)$ paa $S'-S$, og det ses heraf, hvor væsentligt det er, at Middelt-

temperaturen for Pendulmaalingerne er nogenlunde ens paa samtlige Stationer, der skulle sammenlignes. Uagtet nu Temperaturen ved de til forskellige Aarstider udførte Maalingsrækker i København varierer med indtil $11^{\circ},5$, træffer det sig dog saa heldigt, at Gennemsnitstemperaturen for alle disse Rækker $10^{\circ},2$ ligger midt imellem Gennemsnitstemperaturen $12^{\circ},7$ for Maalingerne i Wien og $7^{\circ},7$ for dem i Potsdam. Indsættes Temperaturafvigelsen $2^{\circ},5$ for $(t'-t)$ i Udtrykket $0,285 (t'-t)$, faas for det omhandlede Spillerum i Temperaturkorrektionen $0,7 \cdot 10^{-7}$, der ikke har Betydning for Middelfejlen paa $(S'-S)$, hvis Beløb, som vi senere skulle se, naar op over 7 à 8 Enheder i 7de Decimal.

Paa Bornholm stiller Forholdet sig endnu gunstigere; Middelttemperaturen er her $17^{\circ},2$, og kun paa en enkelt af de 15 Stationer, Maalingerne her omfatte, løber Aftagelsen fra denne Middeltemperatur op til $1^{\circ},9$, ellers er den betydelig mindre, i Gennemsnit numerisk $0^{\circ},76$. Usikkerheden i Varmekonstanten er derfor ogsaa her uden skadelig Indflydelse paa Resultatet.

Derimod spiller en Forandring af den anden Faktor i Varmekorrekturen en langt større Rolle, idet en Fejl af kun $0^{\circ},1$ paa $(t'-t)$ medfører en Fejl af ikke mindre end $4,5 \cdot 10^{-7}$ paa $S'-S$. Fejlen paa $(t'-t)$ hidrører dels fra selve Thermometret og Aflæsningerne derpaa, dels fra den Omstændighed, at Thermometrets Angivelser ikke stemme med Pendulets Temperatur og heller ikke overalt afvige fra denne med nøjagtig samme Beløb. Da en Grad paa Thermometret maaler omtrent 5 Millimeter, og da der i hver maalt Række er 6 Thermometeraflæsninger og paa hver Station mindst 2 Rækker, kan den her omtalte Aflæsningsfejl ikke have stor Betydning; man kommer vel endog ned til en Middelfejl af $0^{\circ},03$ for denne Fejlkilde. Angaaende mulige Forandringer i selve Thermometret viser en Sammenligning af to Bestemmelser, foretagne den ene W i Wien i April 1894, den anden P i Charlottenburg ved Berlin i Januar 1896, at W og P afviger fra Middeltallet $\frac{1}{2} (W + P)$, som er benyttet ved Regningen, med Beløb, hvilke paa de Steder af

Thermometret, hvorpaa Maalingerne ere udførte, variere mellem $0,03$ og $0^{\circ},10$, og Middeltallene af disse Variationer blive for Maalingerne i København $0,063$ og for Maalingerne i Potsdam $0,043$, altsaa en Forskel af $0,02$ eller paa $S'-S$ af $0,9 \cdot 10^{-7}$. Paa Bornholm bliver Forskellen hidrørende fra denne Fejlkilde endnu mindre. Den 3die Fejlkilde, der har sin Grund i Mangel paa Parallelisme mellem Thermometrets Angivelser og Gangen i Pendulets Temperaturforandringer, er vistnok den betydeligste. Den modvirkes ved at arbejde nøjagtig ens paa alle Stationer, saa at man overalt foretager Maalingerne paa omtrent de samme Tider af Døgnet, giver Thermometret den samme Stilling mod Pendulet, holder dette i samme Tid under Glaskassen og behandler det paa samme Maade, inden det bringes ind i denne. Hvor stor Middelfejl der svarer til denne Fejlkilde, kan ikke nøjagtig opgives, men der er adskilligt, der tyder paa, at den Værdi, hvormed den gaar ind i Resultaterne af vore Maalinge, ikke naar op til $0^{\circ},1$, og at den samlede Indflydelse af alle tre Fejlkilder ved Temperaturkorrektionen svarer til en Middelfejl paa $S'-S$, der neppe overskrider $4 \cdot 10^{-7}$, naar S og S' bestemmes hver ved en dobbelt Observationsrække, og som formindskes paa Resultatet af flere Dobbelttrækker.

Naar Observationsuhrets Gang afviger saa lidt fra Stjernetid, at den observerede Svingningstid for vort Middelpendul bliver $0^{\circ},5080$, vil en Gang af 1° i 24 Timer altsaa i 86400 Sekunder give en Korrektion $\Delta u = 58,8 \cdot 10^{-7}$. En Fejl af $0^{\circ},1$ i Gangen vil følgelig medføre en Fejl paa S af henimod $6 \cdot 10^{-7}$. Deraf ses, at Tidsbestemmelserne bør være forholdsvis nøjagtige, og det er derfor en Fordel, at vi overalt have kunnet benytte Københavner Observatoriets Tidsangivelser. Ved Maalingerne i København, hvor Stationen ligger paa Observatoriet, frembød dette ikke Vanskelighed; anderledes med Bornholm, hvor Tiden maatte overføres til Pendulstationerne ad telegrafisk Vej. Dette fordrede Medvirken af Statstelegrafen, der overlod os Brugen af Kablet til Bornholm en Time hver Morgen og Aften de to

Maaneder, Observationerne omfatte, samt af Ingeniørregimentet, der lod et Detachement af Felttelegraferen efterhaanden etablere og afbryde Forbindelseslinier mellem Telegraf- og Pendulstationerne paa Bornholm. For denne med stor Beredvillighed ydede Hjælp benytter Gradmaalingen Lejligheden til her at takke begge de nævnte Institutioner.

Uagtet altsaa Uhrets Middelgang mellem de to Tidsbestemmelser, der omfatte et Dagsresultat, kan antages tilstrækkelig nøjagtigt bekendt, er en større Fejl paa Δu ikke derved udelukket; thi denne Fejl afhænger ogsaa af Variationerne i Observationsuhrets Gang mellem nævnte Tidsbestemmelser. Midlet til at uskadeliggøre denne Variation er at udfylde hele Intervallet med Pendulobservationer, eller naar dette ikke kan ske, da at fordele de enkelte Observationsrækker symmetrisk mod Begyndelsen og Slutningen af nævnte Interval. Det er ved en saadan Fremgangsmaade, at man har opnaaet tilfredsstillende Resultater med det Hawelk'ske Penduluhr, trods dets mangelfulde Kompensation. Paa Bornholm, hvor Temperaturvariationerne ere smaa, er der udført en Dobbelttrække i hvert Observationsdøgn, og ved Behandlingen af disse 15 Dobbelttrækker finder man for Middelfejlen paa et Dagsresultat, d. v. s. den Del af Middelfejlen, der afhænger af de egentlige Iagttagelsesfejl og af Variationerne i Temperatur og Uhrgang, Værdien $4,5 \cdot 10^{-7}$. Heraf fremgaar, at man ikke undervurderer den partielle Middelfejl, der hidrører fra Δu , naar man anslaaer den til højst $4 \cdot 10^{-7}$, hvor Stationsresultatet, som paa Bornholm, kun omfatter en Dobbelttrække. I København og Potsdam, hvor dette Resultat omfatter 8 Dobbelttrækker, turde den fra Δu hidrørende Middelfejl ikke overskride $2 \cdot 10^{-7}$.

Sluttelig skulle vi kort omtale Medsvingningen og dens Reduktion σ . Medsvingningen hidrører dels fra Stativet med Fodstykke, dels fra Observationspillen med Underlag. Den først nævnte Komposant er vistnok ret betydelig, men maa antages ens paa alle Stationer, naar Opstillingen er ens, og kommer

derfor ikke i Betragtning. Under Maalingerne paa Bornholm fremkom den Tanke at forøge Stabiliteten ved at gibse Stativet med Fodstykket fast til Pillen; men denne Tanke kom ikke til Udførelse, fordi man derved vilde ophæve Forudsætningen om samme Medsvingen af Stativet paa alle Stationer, der behandles i denne Sammenhæng.

Den anden Komposant, som hidrører fra Stationspillen, vilde ved Anvendelse af samme Pille ogsaa overalt være ens, hvis ikke Undergrunden paa de forskellige Stationer kunde give Anledning til en Forskel, der bestemmes ved at undersøge Stabiliteten efter den af Helmert angivne Vippemethode. Med en Fjer-vægt meddeles der Stationspillen i Sekundtakt en Række Stød med samme Kraft i en Retning, der falder sammen med Pendulets Svingningsretning. Pendulet, der før Vipningens Begyndelse er bragt til fuldstændig Ro, faar derved et Udslag, hvis Størrelse aflæses i Kikkerten og afgiver et Maal for Medsvingningen σ . Paa alle vore Stationer har imidlertid Underlaget for den meget solide transportable Pille været saa fast, at man ikke ved 10 Stød à 5 Kg. i Sekundtakt har faaet et saa kendeligt Udslag, at man dristede sig til at aflæse det, og vi betragte derfor σ som ens paa alle vore Stationer. I Potsdam har man vel paa vor Observationspille for σ udledet $4 \cdot 10^{-7}$ og paa Pille Nr. 32 i det geodætiske Instituts Pendulsal $5 \cdot 10^{-7}$; men vi have anset det for følgerigtigt i denne Sammenhæng ikke at anbringe disse Korrektioner paa Observationerne i Potsdam, men her ligesom paa de øvrige Stationer at lade σ gaa ud af Betragtning.

III.

Samler man Iagttagelserne med vort Pendulapparat paa Stationerne Wien, København og Potsdam i Grupper, saaledes at hver Gruppe svarer til et bestemt Tidspunkt og indeholder alle omkring dette Tidspunkt i nogle faa Dage udførte Maalinger, vil hver Gruppe omfatte i Reglen fire, undtagelsesvis to Rækker

à 3 Penduler. Ved derefter at sammenfatte Værdierne i samme Gruppe til Middeltal, erholder man de Resultater, der fremstilles i nedenstaaende Oversigt.

<i>T</i>	Wien 48° 12' 40" 183 ^m		København 55° 41' 12" 17 ^m		Potsdam 52° 22' 51" 86 ^m		<i>T</i>
— 0,56	0,5081506	12,9	0,5079702	16,5	0,5080360	7,9	— 0,56
0,00							0,00
+ 1,92			658*	5,1			+ 1,92
3,76			635*	16,2			3,76
5,25			622	6,3			5,25
5,47							5,47
5,58					332	6,0	5,58
6,39					338	5,8	6,39
6,42					0,5080340	10,9	6,42
6,64			0,5079593	7,0			6,64

De umiddelbart under Stationsnavnene i Hovedet opførte Tal angive Bredde og Højde over Havfladen for den vedkommende Pendulstation, medens Tallene nedenunder i selve Skemaet angive Svingningstiden, bestemt ved den paagældende Gruppe, og Gennemsnitstemperaturen for Maalingerne i denne Gruppe. Kun i de to ved * betegnede Svingningstider indgaa to Rækker à 3 Penduler, i alle de øvrige fire saadanne Rækker.

T betegner i Enheder af 100 Dage den Tid, som er forløben mellem den 14de Juni 1894, da den 1ste Observation i København udførtes, og Gennemsnitsværdien af Tiderne for de i Gruppen indgaaende Maalinger.

Den Tid, der ligger imellem to paa hinanden følgende Grupper, varierer for København mellem 139 og 192 Dage, i Gennemsnit 166 Dage eller henimod et halvt Aar. Dette Tidsinterval er tilstrækkelig stort til at indvirke saa stærkt paa de i Skemaet opførte Resultater for *S*, at disse vise det som utvivl-

somt, at S formindskes i Tidens Løb, dog ikke fuldtud proportionalt med Tiden, men saaledes at Formindskelsen i samme Tidsrum efterhaanden synes at aftage, aabenbart ikke ganske regelmæssigt i det enkelte, men vel i det hele og store. En af de simpleste Interpolationsformler, hvorved dette almindelige Forhold kan udtrykkes, har Formen

$$10^7 \cdot K = yT - zT^2,$$

hvor y og z blive at bestemme ved en Udjævning.

Da Virkningen af de i K optrædende Fejlkilder svarer til en Sammentrækning af Pendulet i Tidens Løb, benævnes K Kontraktionen, uden at dermed skal være sagt, at ikke andre Fejlkilder end en virkelig Sammentrækning af Pendulet afgive deres Bidrag til Kontraktionsreduktionen K .

Begynde vi nu med at basere den omtalte Udjævning til Bestemmelsen af de i K indgaaende Elementer y og z alene paa de København'ske Resultater, erholdes følgende 5 Betingelsesligninger, idet man som 3die Element i Udjævningen indfører Korrektionen x paa S svarende til Tidspunktet Nul,

$$\begin{aligned} v_0 &= & + x \\ v_1 &= - 44 + x + 1,92 y - 3,7 z \\ v_2 &= - 67 + x + 3,76 y - 14,1 z \\ v_3 &= - 80 + x + 5,25 y - 27,6 z \\ v_4 &= - 109 + x + 6,64 y - 44,1 z, \end{aligned}$$

hvor eksempelvis v_1 er udledet af

$$702 - x = 658 - v_1 + 1,92 y - 1,92^2 z.$$

Til disse Betingelsesligninger svarer Normalligningerne

$$\begin{aligned} 0 &= - 300 + 5 x + 17,57 y - 89,5 z \\ 0 &= - 1480 + 17,57 x + 89,47 y - 497,7 z \\ 0 &= + 8122 - 89,5 x - 497,7 y + 2919,1 z, \end{aligned}$$

som ved at opløses give for de søgte Elementer

$$x = 2,76, \quad y = 19,34 \quad \text{og} \quad z = 0,600.$$

Endvidere erholdes ved Indsætning i Betingelsesligningerne

$v_0 = + 2,76$	$v_0^2 = 7,6$
$v_1 = - 6,32$	$v_1^2 = 39,9$
$v_2 = + 0,02$	$v_2^2 = 0,0$
$v_3 = + 7,74$	$v_3^2 = 59,9$
$v_4 = - 4,29$	$v_4^2 = 18,4$
Sum = - 0,09	Sum 125,8 ,

altsaa for Middelfejlen m paa Vægtenheden

$$m^2 = 63 \text{ og } m = 8.$$

Ved Indførelse af de fundne Værdier for y og z i det almindelige Udtryk for Kontraktionsformlen bliver denne:

$$10^7 \cdot K = 19,34 T - 0,600 T^2$$

eller omsat i tabularisk Form for de hele Værdier af T mellem - 1 og + 7:

T	$10^7 \cdot K$	1ste Differens.	2den Differens.
- 1	- 19,94		
0	0,00	+ 19,94	- 1,20
+ 1	+ 18,74	18,74	1,20
2	36,28	17,54	1,20
3	52,62	16,34	1,20
4	67,76	15,14	1,20
5	81,70	13,94	1,20
6	94,44	12,74	1,20
7	105,98	11,54	1,20

De herpaa baserede Resultater ere fremstillede i omstaaende Oversigt, der slutter sig til de tidligere opførte Udgangsværdier for S 'erne.

Denne Oversigt forstaaes uden videre Forklaring af de i Hovedet anførte Betegnelser; kun bemærkes det, at v 'erne her ere fundne som Afvigelse fra Middeltallet af $(S + K)$, og naar de ikke for København stemme fuldtud med den tidligere an-

Station	T	$10^7 \cdot K$	$S + K$	v	S_0
Wien.	-0,56	-11,0	0,5081495		
København.	0,00	0,0	0,5079702,0	+ 2,8	699,2
—	+ 1,92	34,9	692,9	- 6,3	699,2
—	3,76	64,2	699,2	0,0	699,2
—	5,25	85,0	707,0	+ 7,8	699,2
—	6,64	102,0	695,0	- 4,2	699,2
Middeltal.	3,514	57,22	0,5079699,2	+ 0,0	699,2
Potsdam.	5,47	87,8	0,5080447,8	+ 11,4	436,4
—	5,58	89,2	421,2	- 15,2	436,4
—	6,39	99,1	437,1	+ 0,7	436,4
—	6,42	99,4	439,4	+ 3,0	436,4
Middeltal.	5,965	93,88	0,5080436,4	- 0,0	436,4

førte Bestemmelse, saa ligger det i den foretagne Afrunding af Værdierne for K og x . Rubriken S_0 angiver de udjævnede Værdier reducerede til Tidspunktet Nul, d. v. s. den 14de Juni 1894, idet man dog kun har opført de sidste Decimaler i S_0 , de 4 første Decimaler ere de samme som anført i Rubriken $S + K$. For den samtidige Forskel mellem Svingningstiderne i Potsdam og København faar man ved Subtraktion af de i Rubriken S_0 opførte Tal for de to Stationer

$$\Delta S = 737,2 \cdot 10^{-7}.$$

Som bekendt udtrykkes Akcelerationstilvæksten Δg ved

$$\Delta g = -\frac{2g}{S} \cdot \Delta S,$$

hvor $\frac{2g}{S}$ har Værdierne

$$38,606 \quad 38,630 \quad \text{og} \quad 38,646$$

henholdsvis for

$$\text{Wien,} \quad \text{Potsdam} \quad \text{og} \quad \text{København.}$$

Anvendes nu her Middeltallet 38,638 for København og Potsdam, erholdes

$$\begin{aligned} \Delta g &= 0,002848, & \text{og med Værdien} \\ \text{for Potsdam} & g = 9,81292 & \text{faas altsaa} \\ \text{for København} & g = 9,81576.8 \end{aligned}$$

Den relative Nøjagtighed af denne Bestemmelse kan ved en Tilmærmsesregning, som vi ikke her skulle opholde os ved, angives ved Middelfejlen $3,5 \cdot 10^{-5}$ paa Δg .

I denne Sammenhæng turde der endnu være Anledning til at fremhæve, at man vil faa et næsten identisk Resultat ved at basere Bestemmelsen udelukkende paa de egentlige Tilslutningsmaalinger, altsaa alle fire for Potsdam anførte og de to Maalinger for København, den ene umiddelbart før, den anden umiddelbart efter Observationerne i Potsdam. Gennemsnitsværdierne for de nævnte Grupper blive nemlig i Henhold til de to tidligere Oversigter

$$\begin{array}{lll} \text{København} & T = 5,945 & S = 0,5079607.5, & K = 93,5 \cdot 10^{-7} \\ \text{Potsdam} & T = 5,965 & S = 0,5080342.5 & K = 93,9 \cdot 10^{-7} \\ \text{Differens} & \Delta T = 0,020 & \Delta S = 0,0000735.0 & \Delta K = 0,4 \cdot 10^{-7} \end{array}$$

Eftersom man tager Hensyn til Kontraktionsforskellen ΔK eller betragter denne som forsvindende, bliver den her omspurgte Værdi for ΔS $1,8 \cdot 10^{-7}$ eller $2,2 \cdot 10^{-7}$ mindre end den paa samtlige Maalinger hvilende Værdi $737,2 \cdot 10^{-7}$, følgelig g enten $0,7 \cdot 10^{-5}$ eller $0,9 \cdot 10^{-5}$ mindre end den tidligere Værdi, og man erhoder som Resultat af Tilslutningsmaalingerne alene og efter Afrunding

$$\text{København } g = 9,81576,$$

der henset til Middelfejlen maa siges at stemme særdeles godt med det tidligere Resultat.

IV.

I foregaaende Artikel har man bestemt Kontraktionsformlen og Udgangsværdien for S alene af de København'ske Maalinger. Vi skulle nu se, hvorledes Forholdet vil stille sig, hvis man lader Udjævningen ogsaa omfatte Potsdam'er Bestem-

melserne, hvilket ikke frembyder Vanskelighed, naar man tilføjer et nyt Element, nemlig Forskellen ΔS i Svingningstiderne paa de to Stationer. ΔS kan i Enheder af 7de Decimalsted passende udtrykkes ved $730 + u$, og u bliver altsaa det nye Element, hvorved Potsdammer Observationerne reduceres til København. Herved ville de tidligere anførte 5 Betingelsesligninger for København kunne suppleres med 4 Ligninger for Potsdam, og man faar saaledes nedenstaaende 9 Betingelsesligninger

$$\begin{aligned} v_0 &= && + x \\ v_1 &= - 44 + x + 1,92 y - 1,92^2 z \\ v_2 &= - 67 + x + 3,76 y - 3,76^2 z \\ v_3 &= - 80 + x + 5,25 y - 5,25^2 z \\ v_4 &= - 109 + x + 6,64 y - 6,64^2 z \\ v_5 &= - 72 + x + 5,47 y - 5,47^2 z - u \\ v_6 &= - 100 + x + 5,58 y - 5,58^2 z - u \\ v_7 &= - 94 + x + 6,39 y - 6,39^2 z - u \\ v_8 &= - 92 + x + 6,42 y - 6,42^2 z - u, \end{aligned}$$

hvor-eksempelvis v_5 er udledet af

$$702 - x = 1360 - v_5 - (730 + u) + 5,47 y - 5,47^2 z.$$

Til disse 9 Betingelsesligninger svarer følgende 4 Normal-
ligninger.

$$\begin{aligned} 0 &= - 658 & + 9 & x + 4,143 y' - 2,3258 z' - 4 u \\ 0 &= - 362,33 + 4,143 x + 2,3258 y' - 1,3606 z' - 2,386 u \\ 0 &= - 210,18 - 2,3258 x - 1,3606 y' + 0,81478 z' + 1,43106 u \\ 0 &= - 358 & - 4 & x - 2,386 y' + 1,43106 z' + 4 u, \end{aligned}$$

hvor

$$y' = 10 y \text{ og } z' = 100 z,$$

og som for de søgte Elementer give

$$x = 2,55, \quad y = 19,853, \quad z = 0,688, \quad u = 6,86$$

og for Klammekoefficienterne, der senere tjene til Beregning af de udjævnede Værdiers Vægte, med sædvanlige Betegnelser

$$\begin{aligned}
 (\alpha\alpha) &= 0,9030 & (\alpha\beta) &= -0,4356 & (\alpha\gamma) &= -0,04626 & (\alpha\delta) &= -0,04059 \\
 (\beta\beta) &= +0,3965 & (\beta\gamma) &= +0,05352 & (\beta\delta) &= +0,01486 \\
 (\gamma\gamma) &= +0,007925 & (\gamma\delta) &= -0,01053 \\
 (\delta\delta) &= +0,67465.
 \end{aligned}$$

Endvidere erhoides ved Indsætning i Betingelsesligningerne:

$$\begin{array}{ll}
 v_0 = + 2,55 & v_0^2 = 6,50 \\
 v_1 = - 5,87 & v_1^2 = 34,46 \\
 v_2 = + 0,47 & v_2^2 = 0,22 \\
 v_3 = + 7,81 & v_3^2 = 61,00 \\
 v_4 = - 4,96 & v_4^2 = 24,60 \\
 v_5 = + 11,70 & v_5^2 = 136,89 \\
 v_6 = - 14,95 & v_6^2 = 223,50 \\
 v_7 = + 0,46 & v_7^2 = 0,21 \\
 v_8 = + 2,79 & v_8^2 = 7,78 \\
 \text{Sum} & 0,00 & \text{Sum} & = 495,16,
 \end{array}$$

altsaa for Middelfejlen m paa Vægtenheden i Enheder af 7de Decimalsted

$$m^2 = 99,03, \quad m = 9,95.$$

Med de fundne Værdier for y og z bliver Kontraktionsformlen

$$10^7 \cdot K = 19,853 T - 0,688 T^2, \\
 \{1,29783\} \quad \{9,8376\}$$

eller bragt i Tabel for de hele Værdier af T mellem -1 og $+7$:

T	$10^7 \cdot K$	1ste Differens	2den Differens	$10^7 \mu$
-1	$-20,541$	$20,541$		$7,1$
0	$0,000$	$19,165$	$-1,376$	$0,0$
$+1$	$+19,165$	$17,789$	$1,376$	$5,4$
2	$36,954$	$16,413$	$1,376$	$9,2$
3	$53,367$	$15,037$	$1,376$	$11,4$
4	$68,404$	$13,661$	$1,376$	$12,3$
5	$82,065$	$12,285$	$1,376$	$12,1$
6	$94,350$	$10,909$	$1,376$	$11,9$
7	$105,259$			$13,2$

Sidste Kolonne i ovenstaaende Tabel angiver Middelfejlen paa $10^7 \cdot K$ og er beregnet af

$$\left(10^7 \cdot \frac{\mu}{m}\right)^2 = (\beta\beta) T^2 - 2(\beta\gamma) T^3 + (\gamma\gamma) T^4,$$

eller, naar Talværdierne indføres,

$$\left(10^7 \cdot \mu\right)^2 = 39,28 T^2 - 10,600 T^3 + 0,7850 T^4.$$

$$\{1,5942\} \quad \{1,0253\} \quad \{9,8949\}$$

Det almindelige Udtryk for Middelfejlen paa en udjævnet Værdi af S , der svarer til Tiden T , kan for Potsdam skrives

$$\left(\frac{\mu}{m} \cdot 10^7\right)^2 = \begin{array}{l} (aa) \left| + 2(a\beta) \right| T - 2(\alpha\gamma) \left| T^2 - 2(\beta\gamma) T^3 + (\gamma\gamma) T^4 \right. \\ - 2(\alpha\delta) \left| - 2(\beta\delta) \right| \quad + (\beta\beta) \left| \right. \\ + (\delta\delta) \left| \quad \quad \quad \right| + 2(\gamma\delta) \left| \right. \end{array}$$

og gælder ogsaa for København, naar de fire Klammekoefficienter, der indeholde δ , udgaa. Naar man i dette Udtryk indsætter de ovenfor opførte Værdier for Klammekoefficienterne, erholdes for København, idet $(\alpha\delta)$, $(\beta\delta)$, $(\gamma\delta)$ og $(\delta\delta)$ sættes lig med Nul,

$$\left(\frac{\mu}{m} \cdot 10^7\right) = 0,903 - 0,8713 T + 0,4891 T^2 - 0,1070 T^3 + 0,00793 T^4$$

$$\{9,9402\} \quad \{9,6894\} \quad \{9,0295\} \quad \{7,8990\}$$

og for Potsdam

$$\left(\frac{\mu}{m} \cdot 10^7\right) = 1,659 - 0,9010 T + 0,4680 T^2 - 0,1070 T^3 + 0,00793 T^4.$$

$$\{9,9547\} \quad \{9,6703\} \quad \{9,0295\} \quad \{7,8990\}$$

Til disse Udtryk bemærkes, at de i $\{ \}$ opførte Tal angive Logarithmerne af de ovenfor staaende Koefficienter.

Resultater, der hvile paa Udjævningen i nærværende Artikel, fremstilles i nedenstaaende Oversigt, som slutter sig til de i Begyndelsen af forrige Artikel opførte Udgangsværdier for S 'erne. Forskellen imellem de i Rubriken v opførte Tal, der angive Afvigelse af Værdierne for $(S + K) \cdot 10^7$ fra deres respektive Middeltal, og de tidligere af Betingelsesligningerne beregnede Værdier for v 'erne hidrører fra Afrundingerne ved Fremstillingen af Oversigten. I Rubriken $10^7 \cdot \mu$ er opført Middelfejlene paa de udjævnede Værdier¹⁾,

¹⁾ De udjævnede Værdier ere ikke direkte angivne i Skemaet, men findes let af $S - v \cdot 10^{-7}$ eller af $S_0 - K$.

Station.	T	$10^7 \cdot K$	$S + K$	v	S_0	$10^7 \cdot \mu$
Wien.	-0,56	-11,3	0,5081494,7			
København.	0,00	0,0	0,5079702,0	+ 2,6	699,4	9,5
—	+ 1,92	35,6	693,6	- 5,8	699,4	6,2
—	3,76	64,9	699,9	+ 0,5	699,4	6,6
—	5,25	85,3	707,3	+ 7,9	699,4	5,8
—	6,64	101,4	694,4	- 5,0	699,4	8,6
Middeltal.	3,514	57,44	0,5079699,4	+ 0,0	699,4	7,3
Potsdam.	5,47	88,0	0,5080448,0	+ 11,7	436,3	5,5
—	5,58	89,4	421,4	- 14,9	436,3	5,3
—	6,39	98,8	436,8	+ 0,5	436,3	5,4
—	6,42	99,1	439,1	+ 2,8	436,3	5,5
Middeltal.	5,965	93,83	0,5080436,3	+ 0,0	436,3	5,4

hvilke Middelfejl i Gennemsnit for Potsdam og København beløbe sig til 6,5 Enheder i 7de Decimalsted. Naar den i Oversigten opførte Gennemsnitsmiddelfejl viser sig noget større for København end for Potsdam, saa hidrører dette fra Potsdammermaalingerens fordelagtigere Beliggenhed i Kontraktionskurven, idet de omslutes af de Københavnske Maalingsgrupper, af hvilke den første og den sidste danne Yderpunkterne for Bestemmelsen og derfor ikke angives saa sikkert ved Kurven som de mellemløbende. Tidspunkterne Nul og 6,64 danne med andre Ord Grænserne for Interpolationen; kommer man udenfor disse Grænser, er det Extrapolation, og dette viser sig ogsaa ved en Forøgelse af Middelfejlen, desto stærkere jo mere man fjerner sig ud over de nævnte Grænser. Allerede ved $T = -0,56$, der svarer til Bestemmelsen i Wien, er Middelfejlen paa $S_0 - K$ voxet til $12,4 \cdot 10^{-7}$, og eksempelvis ved $T = -1$ og $T = +10$ vilde den naa op til henholdsvis 15,4 og 36,4 Enheder i 7de Decimalsted.

Den Omstændighed, at de 4 i Potsdam maalte Grupper have henved en tre Gange saa stor Andel i Fejlkvadratsummen som de 5 København'ske Grupper tilsammen, tør antages at hidrøre fra Uregelmæssigheder i Kontraktionen. Denne maa foruden den systematiske Del, som bestemmes og bortreduceres ved Kontraktionsformlen, tillige have en tilfældig Del, der undertiden kan være ret betydelig, og som i nærværende Tilfælde har gjort sig stærkere gældende ved de to første Grupper i Potsdam end ved de øvrige Maalinger, som indgaa i denne Sammenhæng.

Ved Afrunding af den fundne Værdi for Elementet u erholdes

$$10^7 \cdot \Delta S = 736,9 \pm 8,2,$$

hvor den tilføjede Middelfejl er bestemt af $m\sqrt{(\partial\partial)}$. Samme Værdi for ΔS vilde man erholde af Oversigten ved Subtraktion af de to Værdier i Rubriken S_0 .

Ved at multiplicere ΔS med den i forrige Artikel bestemte Faktor 38,638 erholdes

$$\begin{aligned} \Delta g &= 0,00284.7 \pm 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ og med Værdien} \\ \text{for Potsdam} \quad g &= 9,81292 \text{ faas altsaa} \\ \text{for København} \quad g &= 9,81576.7, \end{aligned}$$

som kun afviger med $0,1 \cdot 10^{-5}$ fra den tilsvarende Værdi i forrige Artikel. Henset til Middelfejlen maa en saadan Afvigelse betegnes som fuldtud forsvindende, og naar hertil kommer, at alle Afvigelser mellem de to «Oversigter» i de nævnte Artikler ere forholdsvis smaa, skønt Kontraktionsformlen er baseret paa et langt fyldigere Materiale i den sidste Oversigt end i den første, saa tyder det paa, at den valgte Form for nævnte Interpolationsformel maa være tilfredsstillende, i det mindste for Værdier af T , der ikke strække sig langt udenfor Grænserne Nul og 6,64.

Endnu skal tilføjes, at man, for at bringe Maalingerne i Wien, som hidtil ere holdte udenfor Betragtning, til at stemme saavel med Værdien $g = 9,80876$ for Wien som med de i nærværende Artikel alene paa Potsdam og København hvilende Resultater, maatte korrigere det for Wien i Oversigten opførte

$S + K$ med henved $19 \cdot 10^{-7}$. Naar det imidlertid erindres, at Wiener Maalingerne ikke have kunnet udøve nogensomhelst Indflydelse paa Bestemmelsen af K , vil dog denne tilsyneladende store Værdi for $-v$ ikke a priori kunne anses for større end de Korrektioner, som Udjævningen tildeler andre Grupper.

V.

Slutningsbemærkningen i forrige Artikel indeholder en Opfordring til nærmere at undersøge, hvorledes Resultaterne ville modificeres, naar man supplerer Maalingsgrupperne i København og Potsdam med Wiener Gruppen, saaledes at alle tre Stationer inddrages i Udjævningen. Dette kan ske ved at føje til de 9 Betingelsesligninger, som anføres i forrige Artikel, en tiende, der med Betegnelserne $-v_9$ for Korrektionen og $1795 + w$ for Differensen mellem samtidige Svingningstider i Wien og København kan fremstilles af

$$79702 - x = 81506 - v_9 - 0,56y - 0,56^2z - 1795 - w$$

og bliver $v_9 = +9 + x - 0,56y - 0,56^2z - w$.

Der kommer altsaa herved et femte Element w ind i Udjævningen; men w kan udtrykkes ved det tidligere Element u , naar man stiller den Fordring, at Københavns Tyngdeacceleration skal erholdes med samme Værdi, hvad enten den beregnes fra Wien eller fra Potsdam.

$$\text{Man har for Potsdam } g = 9,81292$$

$$\text{og for Wien } g = 9,80876$$

$$\text{Differens } \Delta'g = 0,00416.$$

Divideres med Faktoren for Wien-Potsdam, som ifølge forrige Artikel kan anslaaes til 38,62, faaes den tilsvarende Differens i Svingningstiderne

$$10^7 \cdot \Delta' S = 1077, \text{ som adderet til}$$

$$10^7 \cdot \Delta S = 730 + u, \text{ giver til Bestemmelse af } w$$

$$1795 + w = 1807 + u,$$

$$\text{altsaa } w = 12 + u.$$

Indføres dette i Udtrykket v_9 , erhoides

$$v_9 = -3 + x - 0,56y - 0,56^2z - u,$$

som i Forbindelse med de 9 Betingelsesligninger fra forrige Artikel giver Normalligningerne

$$\begin{aligned} 0 &= -661 + 10x + 4,087y' - 2,3290z' - 5u \\ 0 &= -362,16 + 4,087x + 2,3290y' - 1,3605z' - 2,330u \\ 0 &= +210,19 - 2,3290x - 1,3605y' + 0,8148z' + 1,4342u \\ 0 &= +361 - 5x - 2,330y' + 1,4342z' + 5u, \end{aligned}$$

hvori

$$y' = 10y \quad \text{og} \quad z' = 100z,$$

og hvoraf man erhoider for de søgte Elementer

$$x = 9,28 \quad y = 15,992 \quad z = 0,306 \quad u = 2,83$$

og for de tilsvarende Klammekoefficienter, der tjene til Beregning af de udjævnede Værdiers Vægte,

$$\begin{aligned} (aa) &= 0,4690 & (\alpha\beta) &= -0,1867 & (\alpha\gamma) &= -0,02164 & (\alpha\delta) &= +0,2194 \\ & & (\beta\beta) &= +0,2538 & (\beta\gamma) &= +0,03940 & (\beta\delta) &= -0,1342 \\ & & & & (\gamma\gamma) &= +0,006527 & (\gamma\delta) &= -0,02527 \\ & & & & & & (\delta\delta) &= +0,5188. \end{aligned}$$

Endvidere erhoides ved Indsætning i Betingelsesligningerne:

$v_0 = + 9,28$	$v_0^2 = 86,10$
$v_1 = - 5,14$	$v_1^2 = 26,46$
$v_2 = - 1,92$	$v_2^2 = 3,67$
$v_3 = + 4,80$	$v_3^2 = 23,08$
$v_4 = - 7,02$	$v_4^2 = 49,33$
$v_5 = + 12,78$	$v_5^2 = 163,21$
$v_6 = - 13,84$	$v_6^2 = 191,48$
$v_7 = + 2,15$	$v_7^2 = 4,62$
$v_8 = + 4,51$	$v_8^2 = 20,35$
$v_9 = - 5,60$	$v_9^2 = 31,35$
Sum = 0,00	Sum = 599,65,

hvoraf for Middelfejlen m paa Vægtenheden følger

$$m^2 = 99,94 \quad m = 10,0.$$

Med de fundne Værdier for y og z bliver Kontraktionsformlen, idet Logarithmen af Koefficienterne opføres under disse,

$$10^7 \cdot K = 15,992T - 0,306 T^2, \\ \{1,20390\} \quad \{9,4857\}$$

eller i tabularisk Form for hele Værdier af T mellem -1 og $+7$:

T	$10^7 \cdot K$	1ste Differens	2den Differens	$10^7 \cdot \mu$
-1	$-16,298$	$16,298$		$5,8$
0	$0,000$	$15,686$	$-0,612$	$0,0$
$+1$	$15,686$	$15,074$	$-0,612$	$4,2$
2	$30,760$	$14,462$	$-0,612$	$7,0$
3	$45,222$	$13,850$	$-0,612$	$8,3$
4	$59,072$	$13,238$	$-0,612$	$8,3$
5	$72,310$	$12,626$	$-0,612$	$7,6$
6	$84,936$	$12,014$	$-0,612$	$7,6$
7	$96,950$			$10,3$

hvor sidste Kolonne angiver Middelfejlen paa Bestemmelsen af $10^7 \cdot K$ og er fremstillet overensstemmende med den tilsvarende Middelfejl i forrige Artikel ved Beregning af Formlen

$$(10^7 \mu)^2 = 25,36 T^2 - 7,875 T^3 + 0,6523 T^4. \\ \{1,4041\} \quad \{0,8963\} \quad \{9,8144\}$$

Ogsaa med Hensyn til Fremstilling af et Udtryk for Middelfejlen paa den til Tiden T svarende udjævnede Værdi af S kan henvises til forrige Artikel med Tilføjende, at nævnte Middelfejl for København beregnes af

$$\left(\frac{\mu}{m} \cdot 10^7\right)^2 = 0,469 - 0,3735T + 0,2970T^2 - 0,07879T^3 + 0,006527T^4 \\ \{9,5723\} \quad \{9,4728\} \quad \{8,8965\} \quad \{7,8147\}$$

og for Wien og Potsdam af

$$\left(\frac{\mu}{m} \cdot 10^7\right)^2 = 0,549 - 0,1051T + 0,2465T^2 - 0,07879T^3 + 0,006527T^4. \\ \{9,0214\} \quad \{9,3918\} \quad \{8,8965\} \quad \{7,8147\}$$

Nedenstaaende Oversigt over Resultaterne er analog med den tilsvarende i forrige Artikel, dog med en Forskel, der hidrører

Station.	T	$10^7 \cdot K$	$S + K$	v	S_0	$10^7 \cdot \mu$
Wien.	- 0,56	- 9,1	0,5081496,9	- 5,6	502,5	8,35
København.	0,00	0,0	0,5079702,0	+ 9,3	692,7	6,84
—	+ 1,92	+ 29,6	687,6	- 5,1	692,7	6,14
—	3,76	55,8	690,8	- 1,9	692,7	6,16
—	5,25	75,5	697,5	+ 4,8	692,7	5,02
—	6,64	92,7	685,7	- 7,0	692,7	8,39
Middeltal.	3,514	50,72	692,7	+ 0,0	692,7	6,51
Potsdam.	5,47	78,3	0,5080438,3	+ 12,8	425,5	5,45
—	5,58	79,7	411,7	- 13,8	425,5	5,25
—	6,39	89,7	427,7	+ 2,2	425,5	5,16
—	6,42	90,1	430,1	+ 4,6	425,5	5,22
(Wien.)	- 0,56	- 9,1	(419,9)	- 5,6	(425,5)	8,35
Middeltal.	4,660	65,74	425,5	+ 0,0	425,5	5,89

fra, at Wiener Bestemmelsen er inddraget i Udjævningen gennem Potsdam og derfor tillige er anført under Potsdam efter at være formindsket med den af Udjævningen uafhængige Værdi $10^7 \cdot \Delta S = 1077$, der benyttedes ved Fremstillingen af v_9 . De saaledes reducerede Tal ere satte i Klamme. Indførelsen af Wienergruppen i Udjævningen har bidraget til at formindske Forskellen mellem den Del af Fejlkvadratsummen, der falder paa Potsdam, og den, der svarer til København, om end førstnævnte Del endnu er mere end dobbelt saa stor som sidstnævnte. Det er samme Aarsag, der bevirker, at de udjævnedes Værdiers Middelfejl ere blevne mindre for København, og dette finder sin Forklaring deri, at det nu er Wienerbestemmelsen, der danner den ene Grænse for Kontraktionskurven, medens tidligere begge Grænser svarede til København. Værdierne for S_0 afvige ikke

ubetydelig fra de tilsvarende i forrige Artikel, nemlig $6,7 \cdot 10^{-7}$ og $10,8 \cdot 10^{-7}$ henholdsvis for København og for Potsdam; men for Differensen ΔS , som det ved relative Bestemmelser alene kommer an paa, er Afvigelsen kun $4 \cdot 10^{-7}$, der ikke overskrider det halve af dens Middelfejl, hvilken Middelfejl maa være større end Elementet u 's Middelfejl $m\sqrt{\overline{\delta\delta}}$, som ifølge Udjævningerne i nærværende og forrige Artikel bliver henholdsvis $7,2 \cdot 10^{-7}$ og $8,2 \cdot 10^{-7}$.

At Koefficienterne i Kontraktionsformlen her ere blevne noget forskellige fra de i de to foregaaende Artikler bestemte, kan ikke overraske, da man her har indført den nye Betingelse, at ΔS ved Udjævningen skal opnaa en bestemt Værdi, nemlig $1077 \cdot 10^{-7}$, og da de ensbetydende Koefficienters Middelfejl ere langt større end deres Differenser. Af det almindelige Udtryk for nævnte Middelfejl,

$$m\sqrt{\overline{\beta\beta}} \quad \text{og} \quad m\sqrt{\overline{\gamma\gamma}},$$

erholdes nemlig med Resultaterne fra Udjævningen i nærværende og forrige Artikel

$$m\sqrt{\overline{\beta\beta}} = \begin{cases} 5,0 \\ 6,3 \end{cases} \quad \text{og} \quad m\sqrt{\overline{\gamma\gamma}} = \begin{cases} 0,81 \\ 0,89 \end{cases}.$$

Ved Afrunding af den fundne Værdi for Elementet u bliver

$$10^7 \cdot \Delta S = 732,8 \pm 7,2,$$

der med den tidligere Faktor 38,638 giver

$$\Delta g = 0,00283.1 \pm 2,8 \cdot 10^{-5}, \quad \text{og med Værdien}$$

for Potsdam $g = 9,81292$ erholdes endelig

for København $g = 9,81575.1$,

hvilken Værdi man ogsaa vilde faa ved Beregning fra Wien med Udgangs-Værdien $g = 9,80876$, $\Delta S + \Delta' S = 1809,8$ og Faktoren 38,626 for Wien-København.

VI.

Ved at sammenholde de i de tre foregaaende Artikler paa tildels meget forskelligt Materiale støttede Resultater for Tyngde-

akcelerationen i København, vil det erkendes, at Overensstemmelsen henset til Middelfejlen er overraskende god, og at det indtil videre vil være mest passende at fastholde for

$$\text{København } g = 9,81575$$

under Bredden $55^{\circ} 41' 12''$ og i en Højde af 17 Meter over Havfladen. Herved maa det ikke lades ude af Agt, at dette Resultat er relativt og hviler paa Oppolzers absolute Bestemmelse. Hvis det ved nye absolute Pendulmaalinger viser sig, at denne skal korrigeres med en Størrelse c , vil den her angivne Værdi for København være at korrigere med samme Beløb c .

Reduktionen til Havets Niveau iberegnet Hensyn til Terrainrelief vil være omtrent $4 \cdot 10^{-5}$, og den til Havfladen reducerede Værdi g_0 bliver altsaa

$$\text{København } g_0 = 9,81579.$$

Betegner man ved γ_0 den saakaldte Normalakceleration i Havets Niveauflade under Bredden λ , vil γ efter Helmer's seneste Bestemmelse udtrykkes ved

$$\gamma_0 = 9^m,7800 (1 + 0,005310 \sin^2 \lambda) + 35 \cdot 10^{-5}$$

eller i en til Regning bedre skikket Form

$$\gamma_0 = 9^m,78035 + \{8,71543\} \sin^2 \lambda,$$

hvor Klammen angiver, at det er Logarithmen og ikke selve Koefficienten, der her anføres. Heraf faas for Bredden $55^{\circ} 41' 12''$

$$\text{København } \gamma_0 = 9,81578,$$

som stemmer godt med g_0 og betegner Tyngdeforholdene ved København som normale.

VII.

Det er oftere fremhævet, at den algebraiske Funktion

$$K = aT - bT^2,$$

som i det foregaaende er benyttet til at fremstille den symmetriske Del af Kontraktionen, kun er at betragte som en Interpolationsformel, gældende for et begrænset Tidsrum, og derfor ikke kan angive Kontraktionens Størrelse udenfor det Tidsinterval,

hvorfor den er bestemt. Navnlig kan den aldeles ikke benyttes til at give en Forestilling om Kontraktionsbeløbets Grænseværdi, og det er dog klart, at K ikke kan voxe eller aftage i det uendelige, men maa konvergere mod en endelig Grænse. En Formel, der opfylder denne Fordring, vil man kunne udlede af det exponentielle Differential

$$10^7 \cdot dK = A \cdot e^{-BT} dT,$$

der konvergerer mod Nul, naar T voxer mod uendelig. Ved Integration under Hensyn til Betingelsen: K er Nul, naar T er Nul, erholdes

$$10^7 \cdot K = \frac{A}{B} (1 - e^{-BT}),$$

eller udviklet i Række

$$\begin{aligned} 10^7 \cdot K &= \frac{A}{B} \left(BT - \frac{B^2 T^2}{2} + \dots \right) \\ &= A \cdot T - \frac{1}{2} AB \cdot T^2 + \dots, \end{aligned}$$

som sammenstillet med den anførte algebraiske Funktion giver

$$A = a, \quad B = \frac{2}{a} \cdot b.$$

Ved Afrunding af Formlen i Artikel IV bliver

$$A = a = 20, \quad B = 0,1 \cdot b = 0,07, \text{ og}$$

$$10^7 \cdot K = 286 (1 - e^{-0,07T}).$$

Paa Grund af den benyttede Rækkeudviklings ringe Konvergens afviger dette Udtryk med indtil 5 à 6 Enheder fra Tabellen i Art. IV. Afvigelsen kan formindskes til 1 à 2 Enheder ved at formindske Konstanten 286 til 270 à 275; men man vil opnaa en bedre Approximation ved at sammenstille $\frac{dK}{dT}$ for de to Funktioner, altsaa ved at gaa ud fra Ligningen

$$a - 2bT = A \cdot e^{-BT},$$

der for $T = \text{Nul}$ giver $A = a$; medens man til Bestemmelsen af B har

$$B = \frac{\log a - \log (a - 2bT)}{T \cdot \log e},$$

som med Værdierne for a og b i Art. IV giver

for $T = -1 \quad +1 \quad +5 \quad +6 \quad +7$
 efter Ordenen $B = 0,0670 \quad 0,0718 \quad 0,0851 \quad 0,0896 \quad 0,0949$,
 hvortil for Kvotienten ($A:B$) svarer Værdier mellem 300 og 200.

Den exponentielle Funktions Konstanter ere derfor temmelig ubestemte; men paa en numerisk Formindskelse af den ene kan der indenfor visse Grænser bødes ved en forholdsvis Forøgelse af den anden. Ved at prøve sig frem finder man, at den ret simple Form

$$10^7 \cdot K = 225 (1 - e^{-0,09T})$$

giver en særdeles god Overensstemmelse med Tabellen i Art. IV, nemlig imellem Grænserne Nul og 7 for T en Middelfvigelse paa $10^7 \cdot K$ af 0,2 og en største Afvigelse af 0,38; medens man ved at udvide Grænserne for T til -1 og $+7$ vilde forhøje Middelfvigelsen til 0,25 og den største Afvigelse til 0,7. Selv denne sidste Afvigelse er dog fuldstændig forsvindende ligeoverfor Middelfejlen paa K , og den anførte exponentielle Funktion kan derfor fuldtud erstatte Interpolationsformlen i Art. IV for Værdier af T større end -1 og kan antages at være bedre end denne til Extrapolation udover Grænsen 7 for T . En nærmere Undersøgelse ved Anvendelse af de mindste Kvadraters Methode vil vise, at en lidt modificeret Form, nemlig

$$10^7 \cdot K = 226,14 (1 - e^{-0,0898T}),$$

giver de mindste Afvigelser fra de syv i Tabellen (Art. IV) opførte Værdier for $10^7 \cdot K$ svarende til Værdierne 1 til 7 for T . Men det nøjagtige Udtryk forandres ikke væsentlig ved at afkortes til

$$10^7 \cdot K = 226 (1 - e^{-0,09T}).$$

For $T = \infty$ vil man have

$$\text{Lim. } 10^7 \cdot K = 226 \pm 180,$$

der dog giver et Begreb om Grænsen for Kontraktionen, skønt denne Grænse, som det ses af den tilføjede Middelfejl, har et ganske antageligt Spillerum.

I nærværende Artikel har Opgaven hidtil været at fremstille

den exponentielle Funktion saaledes, at den paa bedste Maade gengiver Interpolationsformlen fra Art. IV, naar T holder sig mellem Grænserne Nul og Syv. Der frembyder sig nu det Spørgsmaal, om Resultaterne ville forandres, naar man i selve Betingelsesligningerne indfører det exponentielle Udtryk for Kontraktionen i Steden for den benyttede anden Grads Funktion. Udjævningen paa dette Grundlag har stillet sig lidt vidtløftig paa Grund af Vanskeligheden ved at fremstille den exponentielle Funktions Konstanter med en saadan Tilnærmelse, at dens Korrektioner kunne indføres i Betingelsesligningerne under lineær Form. Man har derfor maattet gentage Udjævningen, idet man ved at gaa ud fra det ovenfor fremstillede Udtryk

$$10^7 \cdot K = 225 (1 - e^{-0,09T}) \text{ ved første Udjævning førtes til}$$

$$10^7 \cdot K = 205 (1 - e^{-0,1T}),$$

der derpaa anvendtes som Tilnærmelsesværdi og gav det fuldt ud tilfredsstillende Udjævningsresultat

$$10^7 \cdot K = 205,7263 (1 - e^{-0,102729T}),$$

som imidlertid uden kendelig Fejl kan ombyttes med det simple Udtryk

$$10^7 \cdot K = 210 (1 - e^{-0,1T}),$$

hvor med tilføjede Middelfejl

$$\begin{array}{l} \text{Grænsen for } 10^7 \cdot K \text{ er } 210 \pm 180 \quad \text{og} \\ \text{Exponentkonstanten} \quad 0,1 \pm 0,12. \end{array}$$

Middelfejlene vise, at Formlen er temmelig elastisk; men dette er ikke nogen væsentlig Indvending mod dens Nøjagtighed; thi Konstanternes Variation er som tidligere bemærket ikke uafhængig af hinanden, eftersom en Forøgelse af den ene næsten fuldstændig kompenseres ved en tilsvarende Formindskelse af den anden, forudsat at man holder sig indenfor rimelige Tidsgrænser. Virkelig ville ogsaa eksempelvis de to Udtryk

$$226 (1 - e^{-0,09T}) \quad \text{og} \quad 210 (1 - e^{-0,1T})$$

ikke give nogen betydende Forskel paa derefter beregnede Værdier af K , i det mindste naar T saaledes som her holdes mellem Grænserne -1 og $+7$.

De endelige Resultater af ovenomtalte Udjævning med den exponentielle Kontraktionsformel kunne skrives

$$10^7 \cdot \Delta S = 736,6 \pm 0,82, S_0 = 0^s,5079700.0;$$

$$10^5 \cdot \Delta g = 284,6 \pm 0,32, g = 9^m,81576.6.$$

De ere, henset til den tilladelige Afrundingsfejl, fuldstændig identiske med de i Art. IV paa Grundlag af Interpolationsformlen fremstillede Resultater og opfordre ikke til en Omregning med exponentiel Kontraktionsformel af Udjævningen i Art. V. Derimod kunde der være Anledning til ogsaa for denne Artikel at angive en exponentiel Funktion, der stemmer med den paa-gældende Interpolationsformel, og man skal som en saadan anføre

$$10^7 \cdot K = 358,5 (1 - e^{-0,045T})$$

og tilføje, at Overensstemmelsen er særdeles god, idet ingen af Værdierne, der svarer til T mellem Nul og Syv, afviger fra Interpolationsformlen i Art. V med mere end 0,1; Gennemsnitsværdien af nævnte Afvigelser er 0,07 og deres Sum Nul. Det følger af det foregaaende, at ogsaa denne Formel er elastisk, og den kan uden nævneværdigt Nøjagtighedstab erstattes af mangfoldige andre, eksempelvis den simple

$$10^7 \cdot K = 326,5 (1 - e^{-0,05T}),$$

hvis Konstanter, skønt meget forskellige fra dem, der ovenfor ere fremstillede for Art. IV, dog ikke afvige derfra med Beløb, som paa langt nær naa op til de paagældende Middel fejl.

VIII.

Maalingerne paa Bornholm omfatte 15 Stationer, ligeligt fordelte paa hele Øen med omtrent 3 paa hver 2 Kvadratmile. Af de 15 Stationer ere de 12 anbragte i Kirker, de 3 resterende

i andre Granitkonstruktioner. De tilfredsstillende alle de to væsentlige Betingelser: ikke at paavirkes stærkt af ydre Temperaturforandringer, saaledes at Temperaturen kun har varieret lidt under hele Maalingen, og at frembyde et meget fast Underlag for den transportable Stationspille. Som alt anført er der paa hver Station udført to Rækker Maalinger, og Tidsbestemmelserne ere to Gange daglig ad telegrafisk Vej direkte overførte fra Københavns Observatorium til paagældende Pendulstation.

Nedenfor opføres Resultaterne i 3 Oversigter, hvoraf den første giver Stationens Nummer, Navn, Beliggenhed og Beskaffenheden af Jordlaget nedenunder. I den anden og tredje betegnes Stationen kun ved sit Løbenummer og deri gives Momenter til Beregningen af den stedlige Tyngde g , dens til Havets Niveau reducerede Værdi g_0 samt Normaltyngden γ_0 og dennes Forskel fra g_0 .

Pendulstation		Bredde 55°	Længde Øst f. Greenwich 14°	Højde over Havfladen i Meter.	Jordlaget under Stationen	
Nr.	Navn				Tæt- hed.	Beskaffenhed.
1	Dueoddens Hovedfyrr .	0' 7"	64' 35"	80	2,2	Cementsten.
2	Peders Kirke	1 34	58 47	42	2,2	do.
3	Nexø Kirke	3 38	68 08	4	2,4	Sandsten.
4	Aakirke	4 14	55 20	86	2,6	Granit.
5	Nilars Kirke	4 26	49 06	58	2,4	Sandsten.
6	Rønne Kastel	5 32	42 11	17	2,2	Kulformation.
7	Rytterknægten	6 42	53 34	163	2,6	Granit.
8	Svanike Kirke	8 3	68 44	19	2,6	do.
9	Øster Marie Kirke	8 16	61 11	102	2,6	do.
10	Nykirke	8 22	46 20	56	2,2	Grønsand.
11	Klemens Kirke	10 30	48 20	115	2,6	Granit.
12	Hasle Kirke	11 5	42 40	28	2,2	Kulformation.
13	Rø Kirke	12 38	53 59	99	2,6	Granit.
14	Gudhjem nedl. Kirke	12 42	58 38	27	2,6	do.
15	Allinge Kirke	16 33	48 23	12	2,6	do.
	Middeltal	7 37,5	54 39,7	60,5	2,44	

I Rubrikerne Bredde og Længde af foranstaaende Oversigt er kun opført Bueminuter og Sekunder, medens Graderne, henholdsvis 55° og 14° , ere anførte i Hovedet over selve Skemaet.

I nedenstaaende Oversigt ere Betegnelserne de samme som i de foregaaende Artikler. Beregningen af Kontraktionen K saa-

Nr.	T	Enheder af 10^{-7} K	Decimaler, der følge efter 0,5079		Enheder af 10^{-7} $(S_0) - S_0$	Enheder af 10^{-5} $g - (g)$	g
			S	S_0			
1	4,28	72,4	645	717,4	+ 1,7	+ 0,7	9,81570
2	4,26	72,1	696	768,1	- 49,0	- 18,9	550
3	4,31	72,8	621	693,8	+ 25,3	+ 9,8	579
4	4,21	71,4	679	750,4	- 31,3	- 12,1	557
5	4,24	71,8	660	731,8	- 12,7	- 4,9	564
6	4,46	74,9	664	738,9	- 19,8	- 7,6	561
7	4,19	71,1	688	759,1	- 40,0	- 15,5	554
8	4,34	73,2	624	697,2	+ 21,9	+ 8,5	578
9	4,17	70,8	626	696,8	+ 22,3	+ 8,6	578
10	4,48	75,1	629	704,1	+ 15,0	+ 5,8	575
11	4,43	74,4	622	696,4	+ 22,7	+ 8,8	578
12	4,41	74,2	660	734,2	- 15,1	- 5,8	563
13	4,14	70,4	641	711,4	+ 7,7	+ 3,0	572
14	4,36	73,5	652	725,5	- 6,4	- 2,5	567
15	4,39	73,9	587	660,9	+ 58,2	+ 22,5	592
Midt.	4,31	72,8	646,3	719,1	+ 0,03	+ 0,03	9,81569.2

vel som af Akcelerationerne g er støttet paa Udjævningsresultaterne i Art. IV, som for mindste og største her forekommende Værdi af T , nemlig henholdsvis $T = 4,14$ og $4,48$, giver $10^7 \cdot K = 70,4$ og $75,1$. Af disse Yderværdier kunne saa de mellemliggende Værdier fremstilles ved retlinet Interpolation. De i Rubriken S anførte Værdier ere uddragne af Observationsjournalen, medens S_0 findes af $S + K$. Den videre Fremstilling gaar igennem en fingeret Gennemsnitsstation, idet man danner

Middeltallet (S_0) af de 15 Værdier for S_0 og derefter fremstiller de 15 Differenser (S_0)— S_0 . Naar saa disse Differenser multipliceres med den for København-Potsdam gældende Faktor 38,64, erholdes de 15 i næste Kolonne opførte Værdier for $g—(g)$, hvor (g) er den til (S_0) svarende Værdi for Tyngdeaccelerationen. Talværdien af (g) kan bestemmes ved at gaa ud fra Potsdam eller København (Art. IV):

Potsdam $S_0 = 0,5080436.4$	København $S_0 = 0,5079699.5$
Bornholm (S_0) = <u>0,5079719.1</u>	Bornholm (S_0) = <u>0,5079719.1</u>
Differens = 0,0000717.3	Differens = — 0,0000019.6
$\Delta g = 0,00277.1$	$\Delta g = — 0,00007.6$
Potsdam $g = 9,81292$	København $g = 9,81576.7$
Bornholm $(g) = 9,81569.1$	Bornholm $(g) = 9,81569.1$

Adderes nu den fundne Værdi for (g) til Tallene i Kolonnen $g—(g)$, erholdes Værdierne for de forskellige Stationers Tyngdeacceleration, der i 2den Oversigt under Overskrift g er afrundet til 5 Decimaler af Meteren, medens den i 1ste Kolonne af 3die Oversigt er opført med 6 Decimaler.

Reduktionen for en Stations Højde h er med Jordradien R

$$\frac{2h}{R}g = 0,3083h \cdot 10^{-5},$$

$$\{9,4890\}$$

og multipliceres denne med en Faktor, der er proportional med Jordlagets Tæthed θ og har Værdierne

0,286, 0,312 og 0,338 henholdsvis

for θ lig med 2,2 , 2,4 og 2,6, erholdes Reduktionen for Terrainrelief, hvorved man for Jordens Middeltæthed har benyttet Værdien 5,77.

Ved Beregningen af γ_0 er man gaaet ud fra den i Slutningen af Art. VI angivne Formel

$$\gamma_0 = 9,78035 + \{8,71543\} \sin^2 \lambda,$$

der for Bredden $\lambda = 55^\circ + n$ Bueminuter kan skrives

$$\gamma_0 = 9,815197 + \{0,1514\} n \cdot 10^{-5}.$$

Nr.	Decimaler, der følge efter 9,81 <i>g</i>	Enheder af 10^{-5} Reduktion for		g_0	γ_0	Enheder af 10^{-5} ($g_0 - \gamma_0$)	Nr.
		Højde	Terrain				
1	569,8	24,7	7,1	^m 9,81587	^m 9,81520	68	1
2	550,2	12,9	3,7	559	522	37	2
3	578,9	1,2	0,4	580	525	55	3
4	557,0	26,5	9,0	575	526	49	4
5	564,2	17,9	5,6	577	526	51	5
6	561,5	5,2	1,5	565	528	37	6
7	553,6	50,3	17,0	587	529	58	7
8	577,6	5,9	2,0	582	531	51	8
9	577,7	31,4	10,6	598	531	67	9
10	574,9	17,3	4,9	587	532	56	10
11	577,9	35,5	12,0	601	534	67	11
12	563,3	8,6	2,5	569	535	34	12
13	572,1	30,5	10,3	592	538	55	13
14	566,6	8,3	2,8	572	538	34	14
15	591,6	3,7	1,3	594	543	51	15
Midt.	569,1	18,7	6,0	9,81581.7	9,81530.5	51,3	Midt.

Ved disse Udtryk ere g_0 , γ_0 og $g_0 - \gamma_0$ fremstillede med 6 Decimaler og derefter opførte i Oversigten afrundede til 5 Decimaler. Paa denne Afrunding beror det, at der kan være en Forskel af $\pm 1 \cdot 10^{-5}$ mellem Værdierne i Kolonnen ($g_0 - \gamma_0$) og Differenserne af de tilsvarende i Kolonnerne g_0 og γ_0 opførte Tal.

Da Maalingerne paa Bornholm særlig skulle sammenstilles med Maalinger, der hvile paa Potsdam, ere de beregnede paa Grundlag af Resultaterne i Art. IV, der ikke tager Hensyn til Bestemmelserne med vort Apparat i Wien. Hvis man imidlertid ogsaa vilde støtte sig paa disse Maalinger og derfor havde lagt Værdierne i Art. V til Grund for Beregningen, vilde de dermed forbundne Forandringer i Oversigtens Talværdier for g ikke noget Sted overskride $0,5 \cdot 10^{-5}$, hvilket Beløb maa betegnes

som ganske forsvindende, navnlig henset til at Middelfejlen paa de Bornholm'ske Bestemmelser af g ikke kan anslaaes mindre end (4 à 5) $\cdot 10^{-5}$.

De i sidste Oversigt opførte Værdier for Tyngdeoverskudet ($g_0 - \gamma_0$) ere lagte til Grund for Kurvekortet over Bornholm paa den medfølgende Plan. Kurverne fremstille Stederne for samme Værdier af $g_0 - \gamma_0$ med Ækvidistancen $5 \cdot 10^{-5}$ mellem Grænsekurverne $35 \cdot 10^{-5}$ og $65 \cdot 10^{-5}$. De betegne med stor Tydelighed en brudt Middelinie gennem hele Øen som Stedet for det største reducerede Tyngdeoverskud og vise, hvorledes dette Overskud herfra falder mod Nord og Syd, Øst og Vest. De Dele af Øen hvor ($g_0 - \gamma_0$) har sin Middelværdi $51,3 \cdot 10^{-5}$ ere angivne ved en stærkere Linie.

Den anden Tegning paa medfølgende Plan er en Gentagelse af Helmer's Fremstilling af Massefordelingen under Meridianen fra Schneekoppe i Riesengebirge til Kolberg ved Østersøen, udvidet til ogsaa at omfatte Bornholm, som er indlagt med sin Middelværdi for Tyngdeoverskudet. Naar nemlig Tallene i Kolonnen ($g_0 - \gamma_0$) multipliceres med 10, angive de Tykkelsen i Meter af den Masse med Tæthed 2,4, som koncentreret i Havets Middelniveau vilde kunne frembringe det paaviste Tyngdeoverskud. Det ses, at den underjordiske Masseophobning intet Sted paa hele Strækningen Nord for Riesengebirge er saa stor som under Bornholm. Naar Profilet ogsaa er fortsat under Østersøen Nord for Kolberg, beror dette paa den Antagelse, at Overgangen mellem Masseophobningerne ved Kolberg og under Bornholm er jævn, en Antagelse, der ikke kan bekræftes ved Forsøg, eftersom den nøjagtige Bestemmelse af Tyngden til-søs endnu maa betegnes som et Fremtidsproblem.

For den store Forekommenhed, hvormed det militærgeografiske Observatorium i Wien og det geodætiske Institut i Potsdam have ydet deres værdifulde Bistand baade ved Konstant-

bestemmelserne og ved Udførelsen af Tilslutningsmaalingerne, skylder jeg at udtale en forbindtlig Tak saavel til Lederne af de nævnte Institutioner, Hr. Oberst von Sterneck og Hr. Gehejmerraad Helmert, som til de Assisterter, der have medvirket ved selve Arbejderne, nemlig Hr. Hauptmann O. Krifka i Wien og Hr. Haasemann i Potsdam.

I øvrigt ere alle i nærværende Sammenhæng behandlede Maalinger udførte af Kaptajn i Generalstaben E. C. Rasmussen. Under Henvisning til en Anvisning om Pendulapparatets Brug, som Oberst von Sterneck har offentliggjort i Wiener militærgeografiske Instituts Meddelelser, har Kaptajn Rasmussen efter min Opfordring udarbejdet en kort Fremstilling af nogle Enkeltheder ved Stationernes Etablering, Apparatets Opstilling osv., saaledes som de udføres ved vore Maalinger. Da denne Fremstilling har Betydning for fremtidige Maalinger, lader jeg den med Affatterens Samtykke følge som Bilag til nærværende Meddelelse.

Bilag:

Fremgangsmaaden ved Pendulmaalinger.

Af

Kaptajn af Generalstaben **E. C. Rasmussen.**

I denne Fremstilling betyder M. XIII. D. «Mittheilungen des K. u. K. militär-geographischen Institutes, XIII. Band: Einige allgemeine Directiven für die Ausführung der Pendel-Beobachtungen von Robert Sterneck».

Saaalænge som muligt før Iagttagelserne rekognosceres Stationerne. De Betingelser, der søges opfyldte, ere i Hovedsagen:

- a) Lokaler med ringe Temperaturforandringer (Bygninger med tykke Mure, underjordiske Rum o. l.).
- b) Gunstig Beliggenhed mod forstyrrende Indflydelse (Færdsel, Sprængningsarbejder etc.).
- c) Gunstig Beliggenhed for Tidsbestemmelser (Lokaliteter for Opstilling og Orientering af Passageinstrument; bekvem telegrafisk Forbindelse).
- d) Heldige Forhold for Observationspillens Opstilling (Beton-gulv, Flisegulv eller den naturlige Jordbund, under ingen Omstændigheder Planke- eller Bræddegulv, selv nok saa solidt, med mindre det kan fjernes).
- e) Gunstige Betingelser for Penduluhrets Ophængning (solide Mure af Granit eller Mursten, i Nødsfald gode Træstolper; Bræddevægge ere ubrugelige).

Naar Stationen er valgt, forberedes den snarest muligt for Observationerne. Paa et passende Sted i Muren anbringes 2 Skruebolte i c. 1 Meters Afstand, saaledes at man derpaa kan fæstne den Planke, paa hvilken Uhrbrættet fastskrues.

Boltene faststøbes i Granitmur med Bly, som maa drives («stemples») efter Indstøbningen. I almindeligt Murværk kan man bruge Cement (1 Del Cement og 1 Del Grus); denne Indstøbning maa have 2 à 3 Dage for at hærdes. Er Tiden knap, bør man udrøre Mørtlen i Natronvandglas i Stedet for i Vand; den er da fast i Løbet af 1 Time. I Træværk fæstnes Planken med Træskruer. Under alle Omstændigheder iagttager man at lægge Boltene saaledes, at Planken kan stilles nøjagtig lodret.

Gulvet undersøges nøje. Ved Bedømmelsen af dets Fasthed kan en fin Libelle gøre Nytte, idet man forsøger, hvor vidt den flytter sig ved et Tryk i dens Nærhed. Bestaar Gulvet af støbt Beton, undersøges Lagets Tykkelse, hvilket let sker ved paa enkelte Steder at gennembore det med et almindeligt Stenbor, paa hvilket man dog kun bør slaa med ganske smaa Slag. Naar Undersøgelsen, der ogsaa bør gaa ud paa at finde Underlaget, er tilende, udstøbes Borehullerne med Beton. Er Gulvet flisebelagt og findes der, som Tilfældet ofte er i Kirker, Fliser af betydelig Størrelse, vælger man en af de største som Fundament for Pillen, idet man sikrer sig, at den valgte Flise ligger fast. Bestaar Gulvet af mindre Fliser, renser man omhyggeligt Fugerne, væder dem og udstøber dem med Beton i en Udstrækning af et Par Alen i Svingningsplanets Retning. Bestaar Gulvet af Brædder, Brosten eller det naturlige Jordsmon, maa Pillen fundamenteres: Gulvet optages og der graves en Fordybning af 1 Alens Brede og c. $2\frac{3}{4}$ Alens Længde samt $\frac{1}{2}$ Alens Dybde. I begge Ender af Fordybningen opmures med Cementmørtel en Pille af $\frac{1}{2}$ Alens Højde og 1 □ Alens Tvær-snit. Paa disse Piller anbringes Observationspillens Fodplade.

Endelig tilvejebringes de nødvendige Aabninger, Kroge og lignende for de elektriske Ledninger.

Efter disse Forberedelser kan man begynde paa Apparaternes Opstilling, der for Uhrets og Pillens Vedkommende bør være tilendebragt mindst 12 Timer førend Observationerne paabegyndes.

a) Uhrbrættet fastskrues paa den i Forvejen anbragte Underlagsplanke; man maa nøje iagttage, at der paa Planken findes Fordybninger for de smaa Fremspring paa Brædtets Bagside, og ved en Libelle forsikre sig om, at de to Arme, der

bære Uhrværket, ere horizontale. Derefter følger 1) Ophængningen af Uhrets Pendul, 2) Reguleringen af den elektriske Kontakt, 3) Indsættelsen af selve Uhrværket og endelig 4) Reguleringen af Uhrets Slag, hvilke Operationer foretages nøje som de ere beskrevne i M. XIII. D., Punkterne 15, 16, 17 og 18.

Uhret sættes i Gang ved at løsne Klemskruen, der fastholder Løddets Streng, og give Pendulet et passende Udslag. Uhrets Visere lader man staa, som de tilfældig vise ved Ophængningen, og Pendulets Længde, som man før Indhængningen har bestemt den ved Hjælp af Furen paa Pendulstangen og det indfilede Mærke paa Pendullinsens Bæremøtrik, ændrer man ikke, da «Stand» og «Gang» nøjagtig bestemmes ved Tidsobservationerne og deres Størrelse er ligegyldig.

b) Dernæst etableres den transportable Pille¹⁾. Paa Gulvet (eller Fundamentet), der ligesom selve Pillen maa være omhyggeligt afvasket og fugtigt, for at Gibsen kan binde, anbringes 4 cylindriske Jerntraade af c. 10^{cm} Længde og $\frac{1}{2}$ ^{cm} Tykkelse saaledes, at Underlagspladen kan hvile paa Traadstykkerne, der bør ligge midt under Siderne (eller ved Fundamentering under Hjørnerne), saa de stikke et Par Centimeter frem. Den nederste Kubus anbringes paa 4 lignende Traadstykker ovenpaa Fodpladen, og endelig anbringes den øverste Kubus paa lignende Maade ovenpaa den nederste. De tre Stykker haandteres lettest ved Hjælp af en Jernstang, som man stikker i Gennemboringen. Efter at de ere anbragte som ovenfor beskrevet, lader saavel hele Pillen som dens enkelte Stykker sig meget let rulle paa Jerntraadene, indtil den er kommen i den rigtige Stilling; derefter fastgibses Stykkerne til Gulvet og til hverandre indbyrdes, idet man udfylder Mellemmrummene et Stykke ind med en tyk Gibsdejg. Ved Indkøb af Gibs i Provindskøbstæder passer man paa, at Gibsen ikke er «dødbrændt» eller «lædsket», i hvilke Tilfælde den ikke vil stivne, hvilket ellers sker i Løbet af $\frac{1}{4}$ til $\frac{1}{2}$ Time, dog saaledes at forstaa, at Overskudet af Vand først efter længere Tids Forløb fuld-

¹⁾ Pillen bestaar af 1 kvadratisk Fodplade med 1 Alens Side og 2 tilnærmelsesvis kubiske Overstykker med $\frac{1}{2}$ Alens Side. Alle Stykkerne have en lodret Gennemboring. Pillens og dens enkelte Stykkers Vægt bør bestemmes og i alt Fald de kubiske Stykker forsynes med Jernhanke.

stændig fordamper. I Stedet for Gibs kan bruges Cement og Sand, udrørt i Natronvandglas.

Saasnart Gibsen er nogenlunde stivnet, opstilles Pendulstativet og et Pendul indhænges, ganske som det er beskrevet i M. XIII. D., Punkterne 5 og 6; dog skal tilføjes, at Pendulerne kun bør berøres og haandteres med rene Vaskeskindshandsker.

c) Den næste Operation er Anbringelsen af Koincidensapparatet. Som Underlag for dette benyttes et meget solidt Bord, hvis svære Ben faststøbes med Beton til Gulvet. Koincidensapparatet opstilles som det er skildret i M. XIII. D., Punkterne 7, 8 og 9; der gives Pendulet Amplitude, Afstanden udmaales, og Glaskassen sættes over Pendulapparatet som forklaret ovenomtalte Sted, Punkterne 10, 11 og 12.

d) Derefter tilvejebringes den elektriske Forbindelse mellem Uhret og Koincidensapparatet som omtalt i M. XIII. D., Punkterne 22 og 23, dog at Strømbryderen som oftest anbringes paa samme Bord som Koincidensapparatet. Endelig placeres Lysgiveren for Koincidensapparatet som beskrevet samme Sted, Punkt 27.

e) De to andre Penduler (foruden det, der er ophængt i Pendulstativet) ophænges i et Hjælpestativ i Nærheden af Glaskassen; hidtil har man ladet dem ligge i aabent Etui ovenpaa denne.

Anm. Ifølge Direktørens Ordre skulle Pendulerne altid, altsaa ikke alene under Pendulmaalingen, men ogsaa i Tiden mellem Maalingerne og paa Rejser opbevares i lodret Stilling.

Tidligst $\frac{1}{2}$ Time efter at Pendulet er anbragt i Stativet, bør selve Observationerne af dets Svingningstid begynde; den halve Time eller som oftest en Del mere medgaar til forskellige Bestemmelser, der ere nødvendige for Pendulobservationernes Reduktion, nemlig:

- 1) Tidsbestemmelse, ved telegrafisk Overføring fra Københavns Observatorium, eller astronomisk.
- 2) Undersøgelse af Pillens Stabilitet, som foretages saaledes: Pendulet sænkes, saa det hviler paa Agatpladen (se M. XIII. D., Punkt 25). Det bringes i fuldstændig Ro, hvilket lettest sker ved, at man lader en stiv Kartonstrimmel hvile med den ene Ende paa Pendullinsen og med Midten paa

en fast Genstand (Pendulstativet). I Koincidensapparatets Kikkert vil man nu se, at Pendulet efter nogle Øjeblikkes Forløb er fuldstændig i Ro. Ved et let, men rask og bestemt Tryk mod den frie Ende af Strimlen fjernes denne fra Pendulet, og man forsikrer sig om, at dette fremdeles er i Ro. I Mangel af en Kartonstrimmel kan ogsaa en anden Maade anvendes: man holder saa roligt som muligt Støpenslen hen til Pendulet, saaledes at Linsens Kant under Pendulets Svingninger gnider mod Penslen, der maa holdes vinkelret paa Svingningsplanet. Efterat Pendulet paa den ene eller den anden Maade er bragt i Ro, anbringer man Fjedervægten i Svingningsplanets Retning mod Pillens Sideflade og nogle Centimeter fra den øverste Kant. I nøjagtig Sekundtakt meddeler man Pillen 10 horizontale Impulser à 5 Kilogrammer, hvorefter man iagttager Pendulets Udslag; dette har paa samtlige danske Stationer været Nul eller i alt Fald saa nær Nul, at man ikke har dristet sig til at bestemme Størrelsen. For at Undersøgelsen skal kunne anses for fyldestgørende, bør den foretages under Glaskassen, da Luftstrømningerne i Lokalet ofte ville være i Stand til at frembringe langt større Udslag end Fjedervægtens Impulser mod Pillen.

- 3) Aflæsning af Amplituden, efter at Pendulet er sat i Svingninger (M. XIII. D., Punkt 10, sidste Stykke).
- 4) Aflæsning af Barometer (hidtil er paa de danske Stationer brugt Kviksølvbarometer) og Thermometer (M. XIII. D., Punkt 26). Reservethermometret er ved det danske Apparat ganske ligt Observationsthermometret.

Derefter følge selve Pendulobservationerne for 1ste Penduls Vedkommende ganske som de ere skildrede i M. XIII. D., Punkterne 28, 29 og 30, dog at der kun iagttages 50 Koincidenser 10 Gange i Stedet for som i Punkt 29 angivet 60 Koincidenser 10 Gange — Timer og Minuter aflæses direkte paa Penduluhret.

1ste Pendul udtages og 2det Pendul indhænges som angivet i M. XIII. D., Punkterne 31 og 32. Iagttagelserne begynde efter $\frac{1}{2}$ Times Forløb og udføres ganske som ved 1ste Pendul,

dog at man som Regel ikke foretager en ny Tidsbestemmelse eller undersøger Pillens Stabilitet.

3die Pendul behandles ganske som 2det; saa følger en efter Omstændighederne længere eller kortere Pause, hvorefter man gaar tilbage i omvendt Orden, altsaa 3die, 2det, 1ste Pendul.

Efter de 6 «Penduler», der repræsenterer en Arbejdsdag, foretages om muligt strax en ny Tidsbestemmelse.

**Observations relatives de pendules à Copenhague et dans
l'île de Bornholm, avec les mesures de jonction à
Vienne et à Potsdam.**

Par

le général **Zachariae.**

Résumé.

Dans les articles I et II on fait quelques remarques sur le problème de la mesure relative des pendules et l'on donne quelques détails sur la réduction des observations faites avec l'appareil de Sterneck. Les articles III—VII sont consacrés à la détermination de la pesanteur à Copenhague et à l'étude de la diminution de longueur des pendules. Par un calcul de compensation, basé sur cinq séries d'observations de pendules, exécutées à l'observatoire de Copenhague entre le 14 juin 1894 et le 8 avril 1896, et sur quatre séries exécutées à Potsdam entre le 13 décembre 1895 et le 17 mars 1896, on trouve pour la diminution de longueur du pendule moyen de notre appareil de Sterneck (n° 14) la formule d'interpolation

$$10^7 \cdot K = 19,853T - 0,688T^2,$$

où T exprime le temps écoulé depuis le 14 juin 1894 en unités de 100 jours.

Pour les valeurs de T dont il s'agit ici ($-1 < T < 7$) la formule susdite peut très bien être remplacée par la formule exponentielle

$$10^7 \cdot K = 226 (1 - e^{-0,09T}),$$

qui a l'avantage de donner une idée de la limite de K , savoir $\text{lim. } K = 226 \cdot 10^{-7}$, idée à la vérité assez peu exacte, car l'erreur moyenne de cette limite s'élève presque à $200 \cdot 10^{-7}$.

Par la compensation mentionnée on trouve pour la différence des temps d'oscillation à Potsdam et à Copenhague

$$(\text{Potsdam—Copenhague}) \Delta S = 736,9 \cdot 10^{-7},$$

qui correspond à une différence d'accélération de la pesanteur

$$(\text{Copenhague—Potsdam}) \Delta g = (284,7 \pm 3,2) \cdot 10^{-5}.$$

En partant de la valeur

$$\text{Potsdam } g = 9^m,81292$$

on trouve donc

$$\text{Copenhague } g = 9^m,81576.7.$$

Avant le commencement des observations de pendules à Copenhague, on avait fait au mois d'avril 1894, avec notre appareil de Sterneek, une série d'observations à l'Institut géographique militaire de Vienne. Si l'on introduit cette série de Vienne dans la compensation des neuf séries de Copenhague et de Potsdam mentionnées plus haut et qu'on y ajoute la condition que le triangle Vienne-Potsdam-Copenhague doit se clore pour les valeurs

$$g = 9^m,80876 \text{ à Vienne}$$

et

$$g = 9^m,81292 \text{ à Potsdam,}$$

on obtient

$$g = 9^m,81575 \text{ à Copenhague,}$$

nombre qui, vu l'erreur moyenne de $3 \cdot 10^{-5}$, s'accorde admirablement avec le résultat cité plus haut et basé seulement sur la valeur de l'accélération à Potsdam. La station de Copenhague est située à une altitude d'environ 17^m. La réduction au niveau de la mer, y compris la correction pour le relief du terrain, peut être évaluée à $4 \cdot 10^{-5}$, et pour la valeur réduite on a donc

$$\text{Copenhague } g_0 = 9^m,81579.$$

En désignant par γ_0 l'accélération normale au niveau de la mer à la latitude λ , on peut, d'après les dernières publications de M. Helmert, calculer γ_0 par la formule

$$\gamma_0 = 9^m,7800 (1 + 0,005310 \sin^2 \lambda) + 35 \cdot 10^{-5},$$

qui pour la latitude $55^\circ 41' 12''$ de la station de Copenhague donne

$$\text{Copenhague } \gamma_0 = 9^m,81578.$$

Cette dernière valeur concorde on ne peut mieux avec celle de g_0 , et cela indique qu'à Copenhague l'intensité de la pesanteur a la valeur normale.

L'article VIII expose, au moyen de trois tableaux schématiques, les résultats des observations de pendules exécutées à 15 stations également espacées sur toute l'étendue de l'île de Bornholm. La dernière rubrique du troisième tableau, intitulée $(g_0 - \gamma_0)$, exprime l'excédent de la pesanteur locale, réduite au niveau de la mer, sur la valeur dite normale. Tandis qu'à Copenhague l'excédent peut être regardé comme nul, il s'élève à Bornholm à $51,3 \cdot 10^{-5}$ en moyenne et indique au-dessous de cette île un surplus de masse assez considérable. Sur la planche annexée au Mémoire, la variation de l'excédent de la pesanteur réduite est représentée graphiquement par des courbes équidistantes qui indiquent très distinctement une ligne brisée, partageant l'île par moitié en passant par Dueodden, Østermarie et Klemens Kirke, comme le lieu de la plus grande pesanteur réduite. La seconde figure de la même planche reproduit le profil du méridien entre Schneekoppe et Kolberg publié par Helmert et continué ici jusqu'à Bornholm, où le surplus de masse souterraine atteint son maximum.

